

Protokoll zum FP-Versuch E208  
Fouriertransformation und nichtlinearer Oszillator

Michael Nirschl, Moritz Ringle

08./09.05.2000

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Thema</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
2.1 Die Schnelle Fouriertransformation . . . . .	3
2.2 Abtastung . . . . .	3
2.3 Der nichtlineare Oszillator . . . . .	4
<b>3 Beschreibung</b>	<b>5</b>
3.1 Fouriertransformation . . . . .	5
3.2 Nichtlinearer Oszillator . . . . .	6
<b>4 Ergebnisse und Fehler</b>	<b>6</b>
4.1 Fouriertransformation . . . . .	6
4.1.1 Die FFT mit idealer Abtastung . . . . .	6
4.1.2 FFT bei realer Abtastung . . . . .	8
4.1.3 Reale Abtastung von Signalen aus dem Funktionsgenerator . . . . .	9
4.2 Nichtlinearer Oszillator . . . . .	9
4.3 Simulation des Toda-Oszillators . . . . .	12
<b>5 Zusammenfassung der Ergebnisse</b>	<b>12</b>

# 1 Thema

Im ersten Teil dieses Versuchs werden am Computer die Eigenschaften der schnellen Fouriertransformation und insbesondere mögliche Fehlerquellen bei der FFT studiert. Im zweiten Teil wird am Beispiel eines Serienschwingkreises mit Kapazitätsdiode das Verhalten nichtlinearer physikalischer Systeme untersucht und mit dem Modell des Toda-Oszillators verglichen.

## 2 Theorie

### 2.1 Die Schnelle Fouriertransformation

Bei der Fouriertransformation wird ein Zeit-Signal  $f(t)$ , das bestimmte mathematische Kriterien erfüllt<sup>1</sup>, als Integral über  $\omega \in \mathbb{R}$  der Funktionen  $e^{i\omega t}$  dargestellt. Die Koeffizienten  $F(\omega)$  sind das (Frequenz-)Spektrum von  $f$ , die Funktion  $F$  oder  $\mathcal{F}f$  heißt die Fouriertransformierte von  $f$  und berechnet sich als

$$F(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.1)$$

Es gilt das Fourierfaltungstheorem

$$\mathcal{F}(f * g) = FG \quad (2.2)$$

$$F * G = \mathcal{F}(fg) \quad (2.3)$$

Im Versuch wird anhand eines endlichen Satzes von Abtastwerten, eine endliche Zahl von Werten der Fouriertransformierten berechnet (diskrete Fouriertransformation, DFT). Das Integral geht dabei in eine endliche Summe über. Die Formel lautet:

$$\bar{F}\left(\frac{m}{N}\omega_A\right) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n * \exp\left(-i\frac{m}{N}\omega_A t_n\right) \quad (2.4)$$

wobei  $N$  die Anzahl der Abtastwerte bedeutet,  $m$  von 0 bis  $N - 1$  läuft,  $\omega_A = 2\pi/T_A$  die Abtastfrequenz angibt, und  $f_n$  den Abtastwert von  $f$  zur Zeit  $t_n = nT_A$  darstellt. Ein spezieller Algorithmus der die Symmetrien von  $\bar{F}\left(\frac{m}{N}\omega_A\right)$  ausnutzt und insbesondere von der Möglichkeit Gebrauch macht, eine DFT mit  $2N$  Abtastwerten in zwei DFTs mit  $N$  Abtastwerten zu zerlegen, ist die Schnelle Fouriertransformation (FFT). Mit diesem Algorithmus kann der Rechenaufwand für Abtastwertesätze mit  $2^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  Elementen gegenüber der direkten Berechnung jedes einzelnen Wertes nach Gl. (2.1) drastisch vermindert werden; so ist etwa für  $k = 9$  die FFT mehr als 100fach schneller.

### 2.2 Abtastung

Wie bereits oben erwähnt, wird im vorliegenden Fall, die Fouriertransformation anhand eines diskreten Satzes von Abtastwerten numerisch durchgeführt. Mathematisch kann man die Abtastung als Auswertung des Produkts der abgetasteten Funktion mit einer Kammfunktion und einer Filterfunktion ansehen. Man betrachte der Einfachheit halber (etwas unrealistisch) einen sogenannten Dirac-Kamm  $c_{T_A}$ , der aus unendlich vielen Diracfunktionen im Abstand  $T_A$  symmetrisch um die Null besteht, und vernachlässige zunächst den

<sup>1</sup>Hinreichend ist z. B. das Kriterium von Dirichlet-Jordan:  $f(t)$  habe in jedem endlichen Teilintervall höchstens endlich viele Sprungstellen,  $f$  sei in jedem endlichen Teilintervall von beschränkter Schwankung und  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  konvergiere, dann ist  $f(t)$  als Fourierintegral darstellbar.

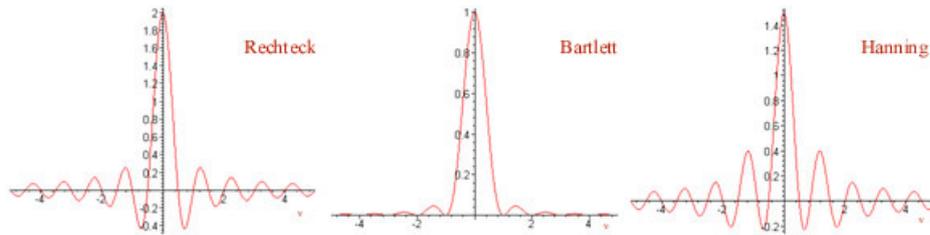


Abbildung 1: Fouriertransformierte der im Versuch verwendeten Filter

Filter. Es gilt  $\mathcal{F}c_{T_A} = c_{2\pi/T_A} = c_{\omega_A}$ . Dann gilt für die abgetastete Funktion  $f_A(t)$  nach Gl. (2.3)

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f_A)(\omega) &= (\mathcal{F}(f \cdot c_{T_A}))(\omega) \\ &= (F * c_{\omega_A})(\omega) \end{aligned} \quad (2.5)$$

In Worten heißt das, dass im Frequenzspektrum jeweils die Werte  $z\omega_A$  der Null äquivalent sind, das Spektrum wiederholt sich also im Abstand von  $\omega_A$ . Ist nun  $f$  bandbreitenbegrenzt, das heißt, gilt  $F(\omega) = 0$  für  $|\omega| > B$ , und gilt ferner die Abtastbedingung

$$\omega_A < B/2 \quad (2.6)$$

so besteht  $\mathcal{F}f_A$  aus den getrennten Spektren  $F(\omega)$  im Abstand  $\omega_A$ . Filtert man also das Spektrum mit einer Rechteckfunktion  $rect_{\omega_A}$  so erhält man aus der Rücktransformation die vollständige Funktion  $f$ . Ist  $f$  nicht bandbreitenbegrenzt oder gilt nicht die Bedingung (2.6), so überlappen sich die Spektren

$$(\mathcal{F}f_A)(\omega) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} F(\omega + z\omega_A) \neq F(\omega) \quad (2.7)$$

und eine eindeutige Rekonstruktion von  $f$  ist nicht mehr möglich. Dieser Effekt heißt Aliasing.

Berücksichtigt man zusätzlich die Filterfunktion also  $f_A = f \cdot c_{T_A} \cdot \text{filt}$ , so ergibt sich im Frequenzraum eine zusätzliche Faltung mit der Fouriertransformierten des Filters (Abb. 1); das heißt im Falle eines Rechtecks mit einer  $\sin(\omega)/\omega$  oder *sinc*-Funktion, im Falle des Bartlett-Filters (Dreieck) mit  $\frac{1-\cos(\omega)}{\omega^2}$ , und für den Hanning-Filter ( $h(t) \propto 1 + \cos^2(\pi t)$ ) ergibt sich  $H(t) \propto \frac{\omega^2 - 3\pi^2}{\omega^2 - 4\pi^2} \frac{\sin(\omega)}{\omega}$ .

### 2.3 Der nichtlineare Oszillator

Im Versuch wird ein nichtlinearer Serienschwingkreis aus Induktivität  $L$ , ohmschem Widerstand  $R$  und nichtlinearer Kapazität  $C$  studiert. Als Modell für diesen Schwingkreis dient der Toda-Oszillator: hier wird das Verhalten der Kapazitätsdiode insofern idealisiert, als man einen Pol der Kapazität bei der Durchlassspannung  $-U_0$  annimmt. Tatsächlich bleibt die Kapazität für  $U \downarrow -U_0$  endlich und geht erst mit  $U \rightarrow -\infty$  gegen unendlich. Als Formel für  $C$  nimmt man also an

$$C(U) = \frac{C_0 U_0}{U_0 + U} \quad (2.8)$$

woraus folgt

$$U(Q) = U_0 \left( \exp\left(\frac{Q}{C_0 U_0}\right) - 1 \right) \quad (2.9)$$

Die Differentialgleichung des Toda-Oszillators lautet in dimensionslosen Größen

$$\ddot{q} + r\dot{q} + e^q - 1 = a \cos(\omega t) \quad (2.10)$$

wobei  $r$  proportional zur Dämpfung und  $a$  proportional zur Anregung ist. Mittels Taylorentwicklung erster Ordnung wird diese Gleichung diskretisiert und in das System von Differenzgleichungen

$$\dot{q}|_{n+1} = \dot{q}|_n(1 - r \Delta t) + (a \cos(n\omega \Delta t) - e^{q_n} + 1) \Delta t \quad (2.11)$$

$$q_{n+1} = q_n + \dot{q}|_n \Delta t \quad (2.12)$$

überführt, wobei  $q_n = q(n \Delta t)$  und  $\dot{q}|_n = \dot{q}(n \Delta t)$ . Dieses Gleichungssystem liegt den vom Computer berechneten Werten zugrunde.

Nichtlineare Systeme wie der nichtlineare Oszillator oder die logistische Gleichung  $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$  zeigen bei Erhöhung des Kontrollparameters  $a$  folgendes Verhalten für große  $n$ . Zunächst gibt es nur einen einzigen Fixpunkt, dann erfolgen im periodischen Gebiet sukzessive Bifurkationen, d. h. bei Werten  $a_m$  des Kontrollparameters verdoppelt sich die Anzahl der Fixpunkte auf  $2^m$ ; die neuen Fixpunkte haben die doppelte Periode. Für die Werte  $a_m$  gilt

$$a_m = a_\infty - c \cdot \delta^m, m \gg 1 \quad (2.13)$$

Für die gemittelten Linienstärken  $I$  zweier aufeinanderfolgender Bifurkationen gilt

$$|I_{m+1}| = \mu^{-1} |I_m|, m \gg 1 \quad (2.14)$$

wobei  $\mu = 4\alpha/\sqrt{2 + 2\alpha^{-2}}$  und  $\alpha \approx 2,5029$  und  $\delta \approx 4,6692$  die universellen Feigenbaumkonstanten sind.

## 3 Beschreibung

### 3.1 Fouriertransformation

Im ersten Versuchsteil wird mittels des Computerprogrammes fp-fft93<sup>2</sup> die schnelle Fouriertransformation untersucht.

Zunächst wird an einem simulierten idealen Datensatz der Einfluss der verschiedenen FFT-Parameter bei idealer Abtastung untersucht. Die folgenden Parameter werden jeweils einzeln variiert:

- APP, Abtastungen pro Periode =  $\omega_a/\omega$
- #DP, Anzahl der Abtast-Datenpunkte
- Filter- oder Fensterfunktion

Daraufhin wird am Rechner eine reale Datenabtastung simuliert, hier können die Auswirkungen von (weißem) Rauschen sowie von endlicher Abtastzeit (mit Mittelwerterfassung und Spitzenwerterfassung) auf das Spektrum beobachtet werden. Schliesslich werden reale Signale eines Frequenzgenerators aufgenommen. Dazu wird der Ausgang des ersten der beiden verfügbaren Funktionsgeneratoren auf den Eingang des Analog-Digital-Wandlers (ADC) für die Abtastfrequenz gegeben. Da dieses Signal nur als Trigger benutzt wird spielt die Signalform hier keine Rolle. Der Ausgang des zweiten Funktionsgenerators wird an den Signalmesseingang des ADC angeschlossen. Es werden vergleichbare Parameter gewählt wie bei der vorangegangenen Simulation, damit die erhaltenen Spektren miteinander verglichen werden können.

<sup>2</sup>Beschreibung von fp-fft93 und fpmess93 in [1]

## 3.2 Nichtlinearer Oszillator

Der Serienschwingkreis (Kenngrößen in [1]) wird zusammengesteckt, Über einen entkoppelnden Transformator wird er an den Funktionsgenerator angeschlossen, der die Anregungsspannung liefert. Diese wird über dem Ausgang des Transformators abgenommen und sowohl auf den x-Kanal des Oszilloskops, als auch auf den Messeingang des ADC für die Anregungsfrequenz gegeben. Über dem Potentiometer  $R$  wird im Schwingkreis  $\dot{Q}$  abgenommen und auf die y-Ablenkung des Oszilloskops und den Signaleingang des ADC gegeben. Eine Schaltskizze findet sich in [1, Abb. 41]. Mit Hilfe des Oszilloskops bestimmt man die Frequenz, bei der durch Erhöhung der anregenden Amplitude die meisten Bifurkationen erreicht werden können, ohne dass das System zu chaotischem Verhalten übergeht. Hierbei müssen zwei Parameter verändert werden: die Amplitude und die Frequenz der anregenden Spannung. Dazu gehen wir wie folgt vor: zunächst wird die Amplitude fast voll aufgedreht und dann bei niedrigen Frequenzen beginnend die Frequenz erhöht, bis die dritte Bifurkation sichtbar wird. Dann wird die Frequenz weiter erhöht; sobald Chaos eintritt, wird die Amplitude vermindert, bis das periodische Gebiet wieder erreicht ist. Schliesslich wählen wir die Frequenz mit den meisten Bifurkationen. Bei dieser Frequenz werden nun mit `fpmess93` die Übergangsamplituden  $a_m$  der anregenden Spannung bestimmt, zwischen den Übergängen wird das Spektrum des Oszillators aufgenommen. Mit Hilfe der  $a_m$  zeichnet man das Bifurkationsdiagramm und bestimmt nach Gl. (2.13) die Feigenbaumkonstante  $\delta$ . Aus den Intensitäten der Spektren lässt sich mittels Gl. (2.14) die Feigenbaumkonstante  $\alpha$  abschätzen. Zum Schluss werden noch Datensätze aus interessanten Bereichen des programmierten Toda-Oszillators mit

$L$	160	mH
$R$	1.9	k $\Omega$
$C_0$	550	pF
$U_0$	1.2	V
$f_0$	16.96	kHz

erzeugt und deren Spektren mit denen des realen Oszillators verglichen.

## 4 Ergebnisse und Fehler

### 4.1 Fouriertransformation

#### 4.1.1 Die FFT mit idealer Abtastung

Zunächst untersuchen wir hier den Einfluss des APP-Wertes, anders ausgedrückt also des Verhältnisses von Abtast- zu Signalfrequenz(en). Als erstes betrachten wir eine Sinusschwingung mit folgenden Parametern:

Funktion	Sinus
#DP	1024
Fenster	keines

Im wesentlichen ist in allen Spektren eine einzelne Linie zu sehen, was klar ist, wenn man berücksichtigt, dass standardmäßig negative Frequenzen in den positiven Frequenzbereich gespiegelt werden.

Da in den Spektren die Frequenz in Bruchteilen der Abtastfrequenz aufgetragen wird, erwartet man als Idealverhalten einen  $\delta$ -Peak bei dem Kehrwert des eingestellten APP-Wertes. Von diesem Idealverhalten weicht das Ergebnis bei APP-Werten  $< 2$  deutlich ab, da die in Abschnitt 2.2 erläuterte Abtastbedingung verletzt wird. Die zugehörige Messreihe findet sich in Tabelle 1. Der Aliasing-Effekt zeigt sich hier darin, dass bei Abtastfrequenzen  $\nu_A < 2\nu$  eine um  $\nu_A$  falsche Frequenz angegeben wird. Außerdem wird die Peakform in

APP	8.0	4.0	2.0	1.5	0.7
1/APP	0.125	0.25	0.5	0.67	1.42
$\nu/\nu_A$	0.12-0.13	0.25	0.5	(-)0.33	0.42
Abweichung	0	0	0	1	1
Peakbreite	schmal	schmal	schmal	breit	s. Ausdruck 1

Tabelle 1: Spektren einer Sinusschwingung für verschiedene Werte von APP

diesem Bereich schlechter, was aber eher auf die nichtganzzahligen APP zurückzuführen ist.

Als nächstes untersuchten wir eine Rechteckschwingung mit

Funktion	Rechteck
#DP	1024
Fenster	keines
APP	$6\pi$

Der APP-Wert bezieht sich auf die Periode der Rechteckschwingung. Da die Rechteckschwingung aber keine bandbeschränkte Funktion ist

$$f(t) = \frac{8 f_+}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\omega_0 t)}{2k+1} \quad (4.1)$$

machen sich Aliasing-Effekte bemerkbar. Wie in Ausdruck 2 zu sehen, werden alle Fourieranteile mit  $k > 4$  nicht richtig im Spektrum dargestellt, so ist z. B. für  $k = 5$  der Peak nicht bei  $11/APP = 0.584$  dargestellt, sondern bei  $0.42 \approx |0.584 - 1|$ . Interessant ist auch, dass die Amplituden regelmäßig nicht bei den erwarteten Werten liegen (Kehrwerte im Verhältnis (1:3:5:7:9:11 ...)) sondern stark um diese Werte schwanken (1:2.57:5.44:6.69:7.44:13.46 ...). In erster Linie dürfte das auf die unterschiedliche Peakbreite zurückzuführen sein, aber zum Teil liegt es wohl auch daran, dass bei einigen Frequenzen höhere und niedrigere Harmonische aufgrund von Aliasing zusammenfallen.

Im nächsten Schritt betrachteten wir den Einfluss der Fenster- oder Filter-Funktionen auf das Spektrum, indem wir den Datensatz der einzelnen Sinusschwingung

Funktion	Sinus
#DP	1024
APP	8

mit den Filtern Rechteck, Bartlett und Hanning (Ausdrücke 3-5) filterten. Vergleichbarkeit ist hier nur bedingt gegeben, da die unterschiedlichen Filterbreiten nicht bekannt sind. Dennoch werden qualitativ die theoretischen Überlegungen aus Abschnitt 2.2 bestätigt. Anschaulich kann man das auch so verstehen, dass die Rechteckfunktion eine scharfe Hauptlinie hat, aber noch relativ ausgeprägte Oberschwingungen; die Dreieckfunktion kommt einem einzelnen Sinus recht nahe und hat daher eine relativ breite Hauptlinie und schwache Oberfrequenzen; der  $(1 + \cos^2)$ -Hanningfilter liegt in etwa dazwischen. Allerdings hat er in unserem Ausdruck noch deutlich schwächere Oberschwingungen als der Bartlett-Filter.

Die Beobachtungen aus [1] zum Vergleich von ganzzahligem und irrationalem APP-Wert können von uns nicht bestätigt werden. In den Ausdrücken der Dreieckschwingung mit ganzzahligen APP (Ausdruck 7) und der Rechteckschwingung mit „irrationalen“ APP (Ausdruck 2) fällt lediglich auf, dass das Dreiecksignal deutlich schwächere Oberschwingungen enthält (sie klingen mit  $(2k+1)^2$  ab) und ausserdem die höheren Oberschwingungen wegen der ganzzahligen APP exakt auf den vorangehenden landen, so dass weniger Linien zu sehen sind. Schmäler sind die Peaks aber deshalb nicht. Wahrscheinlich liegt das daran, dass wir den Ausgangsdatsatz nicht gefiltert haben und damit effektiv einen Rechteckfilter benutzt haben, dessen Auswirkungen den erwarteten Effekt überlagern.

Als letzten Parameter bei der idealen Abtastung haben wir die Anzahl der Datenpunkte variiert. Im wesentlichen kann man dabei feststellen, dass die Linien breiter werden, da die Auflösung der diskreten Fouriertransformierten sinkt und das Fenster sich immer stärker auswirkt. Außerdem stellt man fest, dass der Linienschwerpunkt sich verschiebt; so liegt er z. B. in Ausdruck 7 bei etwa 3.5 statt bei dem erwarteten Wert von 3.33.

#### 4.1.2 FFT bei realer Abtastung

Bei der Simulation der realen Abtastung wurden die Fehlerquellen Abtastweite und Wert-erfassung, Rauschen und Digitalisierungsrauschen untersucht. Dabei werden ab diesem Versuchsteil sämtliche FFTen mit Hanning-gewichteten Eingangsdaten durchgeführt.

Um die Auswirkungen von Abtastweite und Wert-erfassung zu ermitteln, kann im Programm das Verhältnis von Abtastweite zu Abtastperiode (AA) eingestellt und dann zwischen Mittelwert- und Maximalwert-erfassung ausgewählt werden. Wir betrachten jeweils eine Sinusfunktion (eine Frequenz):

Funktion: Sinus (eine Frequenz)

RA<sup>3</sup>: 0

APP: 2.3

DG<sup>4</sup>:64

Bei Mittelwert-erfassung<sup>5</sup> sind im Spektrum im wesentlichen keine Änderungen zu sehen, dies gilt für AA=0.3 ebenso wie für AA=0.01. Dem APP-Wert entsprechend gibt es einen einzigen Peak bei 0.43.

Wechselt man unter Beibehaltung der übrigen Parameter zu Maximalwert-erfassung<sup>6</sup>, so sind im Spektrum weitere Linien bei 10tel-Bruchteilen der Hauptfrequenz wahrnehmbar (Ausdruck 8). Dies liegt daran, dass die Differenz zwischen „wahrem“ und gemessenen Funktionswert ebenfalls regelmäßig ist, da man ja regelmäßig an den gleichen (oder ähnlichen) Stellen des periodischen Signals abtastet. So wird zum Beispiel bei APP=2.3 nach genau 10 Perioden wieder am gleichen Punkt abgetastet, so dass alle auftretenden Unterfrequenzen Vielfache des 10ten Teils der Signalfrequenz sind. Natürlich ist das nur bei einem hoch autokorrelierten Signal wie etwa einer periodischen Funktion der Fall. Zur Veranschaulichung sind in Ausdruck 8b das Originalsignal, die simulierte Maximalwert-erfassung<sup>7</sup> mit AA=0.3 (rot), und die Differenz zwischen den beiden Kurven an den Abtastpunkten (blau) geplottet. Man sieht hier deutlich, dass durch die Maximalwert-erfassung die niedrigeren Harmonischen (besonders deutlich bei der 0.3fachen Grundfrequenz) ins Spiel kommen und dass sich die Abtastwerte nach 10 Perioden wiederholen. Insbesondere sieht man auch, dass es einen Konstantanteil ( $\nu = 0$ ) gibt. Da dieser im Ausdruck des während des Versuchs verwendeten Programmes nur sehr gering erscheint, wurde dort vermutlich der Betrag des Funktionswertes maximiert und nicht der Funktionswert selbst.

Zur Untersuchung des Digitalisierungsrauschens werden folgende Parameter gewählt:

Funktion Sinus (eine Frequenz)

RA 0

AA 0.01

Mittelwert-erfassung

APP 2.3

DG 4

Der Effekt ist im wesentlichen der gleiche wie bei der Maximalwert-erfassung (Ausdruck 9). Der Unterschied besteht lediglich darin, dass die sich periodisch wiederholenden Abwei-

<sup>3</sup>Rauschamplitude/Maximalamplitude

<sup>4</sup>Bitzahl

<sup>5</sup>Der Messwert wird als Mittelwert der Werte an den Grenzen des Abtastintervalls gebildet.

<sup>6</sup>Der Messwert ist der Maximalwert der Funktion während der Abtastdauer.

<sup>7</sup>Maximalwert heißt hier  $\max_{n=-5\dots5} \sin \omega(t + x_n)$  mit  $x_n = \frac{n}{5} \frac{AA}{2APP}$ .

chungen hier nicht durch die Maximalwerterfassung sondern durch den Rundungsfehler in der Erfassung des Messwertes erzeugt werden. Alles weitere ist exakt genauso wie bei der Maximalwerterfassung, insbesondere gilt auch hier, dass die Auswirkungen nur für ein hoch autokorreliertes Signal vergleichsweise einfach zu überschauen sind.

Am Ende dieses Versuchsteils wird noch Rauschen konstanter spektraler Energiedichte simuliert. Im Spektrum ist dabei ein annähernd konstanter Untergrund zu sehen, der den eingestellten Anteil RA von der Maximalamplitude ausmacht. Kleine Fluktuationen sind nur auf statistische Schwankungen bei endlicher Anzahl der Abtastpunkte zurückzuführen. Dieses sogenannte weiße Rauschen kommt in der Natur z. B. im thermischen Rauschen eines Widerstandes vor.

#### 4.1.3 Reale Abtastung von Signalen aus dem Funktionsgenerator

Um zu sehen welche der zuvor simulierten Effekte in unserem Aufbau eine Rolle spielen, werden Funktionsgeneratorsignale mit verschiedenen Parametern abgetastet.<sup>8</sup>

Bei sinnvoller Parameterwahl

Funktion	Sinus
$\nu$	1 kHz
$\nu_A$	2.3 kHz
Filter	Hanning
Signalspannung	ca. 2 V
ADC-Messbereich	5 V

sieht das Spektrum nahezu ideal aus. Der einzige bemerkbare „Dreckeffekt“ ist ein sehr schwaches Rauschen (Ausdruck 10). Dies ändert sich auch nicht, wenn man die Spannung (0.013 V) wesentlich kleiner macht als den Messbereich (5 Volt). Anscheinend reicht die Auflösung des ADC selbst dann noch, um zu verhindern, dass Digitalisierungsrauschen entsteht (Ausdruck 10).

Bei der Untersuchung der nicht bandbreitenbegrenzten Rechteckfunktion ( $\nu_A = 18.5$  kHz,  $\nu = 1$  kHz) wird wieder der oben erläuterte Aliasing-Effekt sichtbar (Ausdruck 11). Danach haben wir noch einige Parameter variiert, aber keine überraschenden Effekte mehr gesehen.

Zusammenfassend können wir also sagen, dass bei unserer Apparatur kaum Fehler durch Messwerterfassung oder Analog-Digital-Wandlung zu erwarten sind und sich auch das Rauschen nur sehr schwach auswirkt. Es ist jedoch nötig, eine genügend hohe Abtastfrequenz und eine geeignete Fensterfunktion zu wählen.

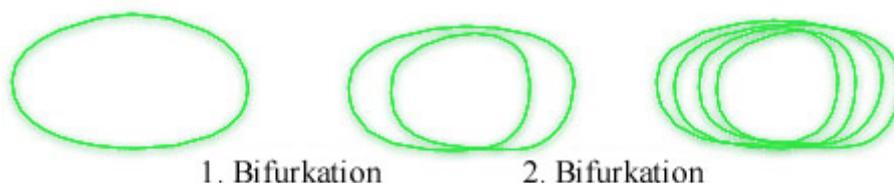


Abbildung 2: Oszillogramme des Nichtlinearen Schwingkreises

## 4.2 Nichtlinearer Oszillator

Nachdem die Eigenschaften des Auswertungsalgorithmus und der Apparatur bekannt sind, kann das reale System Nichtlinearer Oszillator untersucht werden. Als Abtastfrequenz benutzen wir  $\nu_A = 49$  kHz. Als Frequenz, bei der die meisten Bifurkationen beobachtet

<sup>8</sup>Anmerkung: Die Messung der Frequenzen durch das Computerprogramm ergab bei uns vollkommen abstruse Werte, daher sind die Daten für APP und Antriebsfrequenz in den Ausdrucken falsch!

werden können, ermittelten wir  $\nu_0 = 17.51$  kHz. Bei dieser Frequenz wurde nun die Amplitude bei etwa 0.5 V beginnend stufenlos erhöht. Die Veränderung des Oszillogramms und damit des Schwingkreisstromes in Abhängigkeit von der antreibenden Amplitude ist in 2 dargestellt. Die 3. Bifurkation ist nicht mehr dargestellt, bei ihr spalten sich die Linien lediglich ein weiteres Mal auf.

Die Bifurkationen wurden bei folgenden Spannungen gemessen:

1. Bifurkation	0.75 V
2. Bifurkation	2.75 V
3. Bifurkation	3.35 V
Chaos	3.55 V
inverse Bifurkationen . . .	
periodisches Fenster	6.6 V
Bifurkation	7.2 V
(s. Bifurkationsskizze)	

Zwischen diesen Werten wurde das Spektrum des Oszillators aufgenommen. Vor der ersten Bifurkation besteht es aus einer Linie bei 17.5 kHz und einer wesentlich schwächeren Linie bei etwa 14 kHz, die auch in den folgenden Spektren auftaucht (Ausdruck A; 0.6 V). Der Oszillator folgt also der anregenden Wechselfrequenz und seine Amplitude ist zusätzlich mit etwa 14 kHz moduliert. Diese 14 kHz kann man als Linie der doppelten Grundfrequenz ( $|2 \cdot \nu_0 - \nu_A| = 14$  kHz) identifizieren, die vermutlich durch einen nicht ganz sauberen Sinus des Funktionsgenerators zustande kommt. Die Spektren nach den Bifurkationen mit der typischen Periodenverdopplung können ebenfalls weitgehend aufgeklärt werden, die Ergebnisse sind auf den Ausdrucken B-D und in Tabelle 2 dargestellt. Bei 3.55 V geht das System ins Chaos über: das Leistungsspektrum ist nicht mehr diskret (Ausdruck E; 3.7 V). Dann erfolgen inverse Bifurkationen, bis bei 4.5 V hauptsächlich wieder nur die anregende Frequenz zu sehen ist (Ausdruck F). In dem sich anschließenden periodischen Fenster sind wieder diskrete Linien bei 17.5 kHz ( $\nu_0$ ), 5.9 kHz ( $\frac{1}{3}\nu_0$ ), 11.7 kHz ( $\frac{2}{3}\nu_0$ ), 23.4 kHz ( $\frac{4}{3}\nu_0$ ), 19.8 kHz, 13.9 kHz, 8.2 kHz, 2.3 kHz (in der Reihenfolge fallender Intensität) und sehr schwach bei einigen anderen Frequenzen zu beobachten (Ausdruck G; 6 V). Es handelt sich hier also offensichtlich um ein periodisches Fenster mit Grundperiode  $\nu_0/3$ . Bevor der apparaturbedingte Maximalwert der anregenden Spannung erreicht wurde, konnte noch die erste Bifurkation in diesem Fenster beobachtet werden.

Die Messergebnisse zeigen also qualitativ die typischen Kennzeichen eines nichtlinearen Systems:

- die Bifurkationskaskade im periodischen Bereich mit sukzessiver Periodenverdopplung (Auftreten von Subharmonischen mit Frequenzen  $m \frac{\nu_0}{2^n}$ )
- den Übergang zu chaotischem Verhalten (nichtdiskretes Spektrum) und inverse Bifurkationen mit zunehmenden Abständen
- ein periodisches Fenster mit anderer Grundfrequenz  $\nu_0/3$

Quantitativ liefern die Messungen dagegen keine wirklich brauchbaren Ergebnisse, da die für die quantitativen Analysen erforderliche Bedingung hoher Bifurkationsordnungen nicht erreicht werden kann. Gleichung (2.13) ist daher nicht erfüllt: Nimmt man einen Fehler beim Ablesen der Bifurkationsspannungen von 0.05 V an, ergibt sich für den nach dieser Gleichung konstanten Wert  $x = (a_\infty/a_n)^n$

2.59	$\pm 0.32$	(n=1)
4.84	$\pm 0.04$	(n=2)
1.76	$\pm 0.02$	(n=3)

Frequenz in kHz	erstes Auftreten	Interpretation	relative Intensität	
			C (abs.)	D (dB)
17.5	A	$\nu_0$	$1.00^2$	0.0
14.0	A	$ 2\nu_0 - \nu_A $	$0.06^2$	-27.9
8.8	B	$\frac{1}{2}\nu_0$	$0.63^2$	-4.8
22.8	B	$ \frac{3}{2}\nu_0 - \nu_A $	$0.11^2$	-19.8
5.3	B	$ \frac{5}{2}\nu_0 - \nu_A $	$0.02^2$	-36.8
4.4	C	$\frac{1}{4}\nu_0$	$0.28^2$	-11.5
13.1	C	$\frac{3}{4}\nu_0$	$0.11^2$	-20.9
21.8	C	$\frac{5}{4}\nu_0$	$0.06^2$	-23.8
18.4	C	$ \frac{7}{4}\nu_0 - \nu_A $	$0.04^2$	-30.4
9.6	C	$ \frac{9}{4}\nu_0 - \nu_A $	$0.02^2$	-34.8
0.87	D	$ \frac{11}{4}\nu_0 - \nu_A $		-48.0
2.2	D	$\frac{1}{8}\nu_0$		-35.8
6.6	D	$\frac{3}{8}\nu_0$		-32.0
10.9	D	$\frac{5}{8}\nu_0$		-36.0
15.3	D	$\frac{7}{8}\nu_0$		-48.9
19.7	D	$\frac{9}{8}\nu_0$		-43.0
20.6	D	$ \frac{13}{8}\nu_0 - \nu_A ?$		-47.1
21.1	D	$4\nu_0 - \nu_A?$		-48.9
A: 0.6 V B: 2.3 V C: 3.1 V D: 3.45 V				

Tabelle 2: Spektrum des Nichtlinearen Oszillators

Die Feigenbaumkonstante  $\delta$  aus diesen Werten berechnen zu wollen, ist also ein hoffnungsloses Unterfangen. Dementsprechend verwundert es nicht, wenn sich  $\delta_1$  aus der Gleichung

$$\delta_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n + 2 - a_{n+1}} \quad (4.2)$$

zu  $3.33 \pm 0.46$  ergibt und bei weitem nicht mit der tatsächlichen Feigenbaumkonstante  $\delta = 4.66 \dots$  übereinstimmt, obwohl  $\delta_n$  für große  $n$  gegen  $\delta$  geht.

Auch die Bestimmung der Feigenbaumkonstante  $\alpha$  gelingt aufgrund der niedrigen Bifurkationsordnungen nicht. So ergibt sich für die Intensitäten der Hauptlinien nach der dritten Bifurkation  $I_{\nu_0} : I_{\nu_0/2} : I_{\nu_0/4} : I_{\nu_0/8}$

$$0 \text{ dB} : -4.8 \text{ dB} : -11.5 \text{ dB} : -35.8 \text{ dB}$$

und für die gemittelten Intensitäten der entsprechenden Subharmonischen mit  $\nu < \nu_0$

$$0 \text{ dB} : -4.8 \text{ dB} : -12.9 \text{ dB} : -33.3 \text{ dB}$$

Man erwartet aber gemäß Gl. (2.14) und  $\alpha = 2.50 \dots$ , dass diese Werte sich konstant um etwa 8.2 dB unterscheiden, was hier offensichtlich nur für die Linien nach erster und zweiter Bifurkation gegeben ist. Die Werte der Feigenbaumkonstanten  $\alpha$  die sich aus diesen Verhältnissen berechnen sind

1.33	(n=0)
2.46	(n=1)
38.8	(n=2)

Angsichts dieser Diskrepanzen erübrigt sich wohl die Angabe eines Fehlers.

### 4.3 Simulation des Toda-Oszillators

Die Simulation des Toda-Oszillators ergibt qualitativ ähnliche Ergebnisse wie unser nicht-linearer Oszillator. Aufgrund der verschiedenen Oszillatorparameter kann quantitativ nicht direkt verglichen werden.

Die Bifurkationen liegen hier bei 1.7 V, 1.88 V, 1.89 V und 1.90 V, das chaotische Gebiet beginnt bei 2.0 V.

Bei 0.6 V sieht man einen scharfen Peak bei der antreibenden Frequenz; den Peak zur doppelten Grundfrequenz (Ausdruck A) sieht man hier nicht (Ausdruck T1). Trivialerweise sieht man auch kein Rauschen. Bei 1.7 V (Ausdruck T2) erscheint der Peak zur Frequenz  $\nu_0/2$ , er ist im Vergleich zu Ausdruck B deutlich kleiner, außerdem sind hier nicht die Linien zu den ungeraden Vielfachen von  $\nu_0/2$  zu sehen. Bei 1.8 V erkennt man in Ausdruck T3 zusätzlich die Linien von  $m \cdot \nu_0/4$  mit  $m \leq 5$ , wobei die Intensitäten sich ebenfalls wieder sehr anders verhalten als in unserer Messung und Linien für höhere  $m$ , die wir messen konnten, nicht auftreten. Das gleiche Bild bietet sich nach der nächsten Bifurkation (Ausdruck T4; 1.89V). Wie die gemessenen Linienhöhen nach der 4. Bifurkation ergeben, kann auch aus dieser Simulation  $\alpha$  nicht bestimmt werden, da das Verhältnis der Peakhöhen stark schwankt (Ausdruck T5; 1.9 V). Der Übergang ins Chaos sieht beim Modell sehr anders aus, als bei uns. Schon bei Anregungsspannungen geringfügig über  $a_\infty$  ist im Chaos als diskrete Linie nur noch die antreibende Frequenz auszumachen (Ausdruck T6; 2 V), während im realen Schwingkreis zunächst noch viele Linien zu sehen sind, deren Zahl dann im Verlauf inverser Bifurkation mit zunehmenden Abständen geringer wird.

## 5 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die wesentlichen Charakteristika von Schneller Fouriertransformation (Abhängigkeit von Abtastrate, Filter, Anzahl der Datenpunkte) und realer Abtastung mit einem ADC (Auswir-

kungen endlicher Abtastzeit, Digitalisierungsrauschen) konnten anhand der Computersimulation untersucht werden. Die reale Messung beeinflussten dann hauptsächlich Aliasing bei Frequenzen größer als die halbe Abtastfrequenz und ein geringer Rauschpegel. Der Einfluss der anderen zuvor studierten Fehlerquellen konnte durch die Wahl geeigneter Parameter minimiert werden.

Beim nichtlinearen Serienschwingkreis konnten wesentliche Eigenschaften einfacher nichtlinearer Systeme (Bifurkationskaskade mit Periodenverdopplung, Übergang zum Chaos, inverse Bifurkation, periodische Fenster) beobachtet werden. Die Feigenbaumkonstanten  $\alpha$  und  $\delta$  konnten jedoch aus der Messung nicht präzise bestimmt werden, da die dazu erforderlichen hohen Bifurkationsordnungen nicht erreicht werden konnten.

Im Vergleich mit der Toda-Simulation ergab sich, dass das Toda-Modell die grundlegenden Phänomene des Serienschwingkreises qualitativ richtig beschreibt, mit der Ausnahme, dass von uns gemessene Frequenzen  $m \frac{\nu_0}{2^n}$  für größere  $m$  vom Modell nicht erfasst werden. Eventuell sind diese Linien jedoch durch Oberfrequenzen  $m\nu_0$  des Sinusgenerators verursacht, so dass hierzu keine eindeutige Aussage getroffen werden kann. Die schrittweise inverse Bifurkation im untersuchten Serienschwingkreis konnte in der Toda-Simulation ebenfalls nicht reproduziert werden.

## Literatur

- [1] PETERS, ANDREAS: *Der nichtlineare Oszillator, ein neuer F-Praktikumsversuch*. PI Universität Bonn, 1988.